



## A nonlocal problem for a hyperbolic equation with a singular coefficient that degenerates inside a domain

Sanam CHORIEVA<sup>1</sup>

Termez State University

### ARTICLE INFO

#### *Article history:*

Received February 2021  
Received in revised form  
28 March 2022  
Accepted 20 April 2022  
Available online  
15 May 2022

#### *Keywords:*

Singular coefficient,  
hyperbolic equations,  
degenerate within the  
region, Bitsadze-Samarsky  
conditions.

### ABSTRACT

The problem for hyperbolic equations that degenerate inside the domain is studied with the Bitsadze-Samarsky condition, which relates the values of the desired solution on the characteristic with the values on two special curves lying inside the domain.

2181-1415/© 2022 in Science LLC.

DOI: <https://doi.org/10.47689/2181-1415-vol3-iss4/S-pp126-133>

This is an open access article under the Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

## Соҳа ичидаги коэффисентли сингуляр тенгламанинг нолокал ҳолати

### АННОТАЦИЯ

#### *Калит сўзлар:*

Сингуляр коэффицент,  
гиперболик тенгламалар,  
соҳа ичида бузиладиган,  
Бицадзе-Самарский  
шартлари.

Соҳа ичида бузиладиган гиперболик тенгламалар учун Бицадзе-Самарский шarti ўрганилади, изланаётган ечимнинг характеристикадаги қийматларини соҳа ичида жойлашган иккита махсус эгри чизикдаги қийматлар билан боғлайди.

## Нелокальная задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом

### АННОТАЦИЯ

#### *Ключевые слова:*

Сингулярный  
коэффициент,  
гиперболических

Исследуется задача для гиперболических уравнений, вырождающихся внутри области, с условием Бицадзе-Самарского, связывающим значения искомого решения на

<sup>1</sup>PHD, Lecturer, Termez State University, Termez, Uzbekistan

уравнений,  
вырождающихся внутри  
области, условия Бицадзе-  
Самарский.

характеристике со значениями на двух специальных  
кривых, лежащих внутри области.

### 1. Постановка задачи Г.

Рассмотрим уравнение

$$-|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \quad m > 0 \quad (1)$$

Пуст  $\Omega$  конечная односвязная область плоскости независимых переменных  $x, y$ , ограниченная характеристиками

$$\left. \begin{array}{l} AC_1 \\ BC_1 \end{array} \right\}: x \mp \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = \mp 1, \quad y > 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} AC_2 \\ BC_2 \end{array} \right\}: x \mp \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = \mp 1, \quad y < 0.$$

**Задача Г.** Найти в области  $\Omega$  регулярное решение

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in \Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}. \end{cases}$$

уравнения (1) из класса  $C(\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2) \cap C^2(\Omega \setminus AB)$  удовлетворяющее  
краевым условиям

$$u_j[\theta^{(j)}(x)] = \mu_1 u_j[\theta_{k_1}^{(j)}(x)] + \mu_2 u_j[\theta_{k_2}^{(j)}(x)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \mu_1 u_j(p_1(x), 0) - \frac{1}{2} \mu_2 u_j(p_2(x), 0) + \delta_j(x), \quad \forall x \in I = AB \quad (2)$$

здесь,  $j=1$  соответствует области  $\Omega_1$ , а  $j=2$  области  $\Omega_2$ ,

$p_1(x) = a_1 + b_1 x$ ,  $p_2(x) = a_2 + b_2 x$ , где  $a_i = \frac{2}{k_i + 1}$ ,  $b_i = \frac{k_i - 1}{k_i + 1}$ ,  $i=1, 2$  и условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_1(x, y) = c \lim_{y \rightarrow -0} u_2(x, y), \quad \forall x \in \bar{I}, \quad (3)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \rho(x) \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \lambda(x), \quad \forall x \in I \quad (4)$$

где  $\theta^{(j)}(x)(\theta_{k_1}^{(j)}(x), \theta_{k_2}^{(j)}(x))$

$$\theta^{(j)}(x_0) = \frac{1+x_0}{2} + (-i)^{j-1} \left[ \frac{(m+2)(1-x_0)}{4} \right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_{k_1}^{(j)}(x_0) = \frac{1+k_1x_0}{1+k_1} + (-i)^{j-1} \left[ \frac{(m+2)(1-x_0)}{2(k_1+1)} \right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta_{k_2}^{(j)}(x_0) = \frac{1+k_2x_0}{1+k_2} + (-i)^{j-1} \left[ \frac{(m+2)(1-x_0)}{2(k_2+1)} \right]^{\frac{2}{m+2}}$$

аффикс точки пересечения характеристики  $BC_j$  (кривой  $x + \left[ 2k_j / (m+2) \right] |y|^{(m+2)/2} = 1$ , лежащей внутри области  $\Omega_j$ ) с характеристикой, выходящей из точки  $M(x_0, 0) \in I$ ;  $c = \text{const}$ ;  $\mu_1, \mu_2 = \text{const}$ ;  $\delta_j(x), \rho(x), \lambda(x)$

заданные функции из класса  $C^2(\bar{I}) \cap C^3(I)$ , причем

$$\tau(1) = \tau'(1) = \tau''(1) = 0 \quad (5\text{ъ})$$

$$\rho(x) - c \neq 0, k_1 > k_2 > 1, \delta_j^{(n)}(1) = 0, \lambda^{(n)}(1) = 0, n = 0, 1, 2.$$

## 2. Исследование задачи Г.

**Теорема.** Задача Г при выполнении условий (5ъ)

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 1, \quad (6\text{ъ})$$

$$\lambda_k = \frac{b_k \mu_k}{b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2 - 1}, \quad k = 1, 2$$

где  $\lambda_k$  — однозначно разрешима.

**Доказательство.** 1. Рассмотрим краевое условие (2) в области  $\Omega_1$ , видоизмененным задачи Коши [1] удовлетворяющее условиям:

$$u_1(x, +0) = \tau_1(x), \quad x \in \bar{I}; \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu_1(x), \quad x \in I \quad (5)$$

дается формулой Даламбера [2]:

$$u(x, y) = \frac{\tau\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right) + \tau\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)}{2} - \frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2} \int_{-1}^1 \nu\left[x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] dt, \quad (6)$$

Отсюда легко вычислит, что [23]

$$u_1[\theta^{(1)}(x)] = \frac{1}{2}[\tau_1(x) + \tau_1(1)] - \frac{1}{2} \int_{-1}^x \nu_1(t) dt, \quad (7)$$

$$u_1[\theta_{k_1}^{(1)}(x)] = \frac{1}{2}[\tau_1(a_1 + b_1 x) + \tau_1(x)] - \frac{1}{2} \int_x^{a_1 + b_1 x} \nu_1(t) dt, \quad (8)$$

$$u_1[\theta_{k_2}^{(1)}(x)] = \frac{1}{2}[\tau_1(a_2 + b_2x) + \tau_1(x)] - \frac{1}{2} \int_x^{a_2+b_2x} v_1(t)dt \quad (9)$$

Теперь выражения (7)-(9), подставляя в краевые условия (2) получим

$$\tau_1(x) - \frac{1}{2} \int_x^1 v_1(t)dt = \mu_1 \tau_1(x) + \mu_2 \tau_1(x) - \mu_1 \int_x^{a_1+b_1x} v_1(t)dt + \mu_2 \int_x^{a_2+b_2x} v_1(t)dt + \delta_1(x) \quad (10)$$

Соотношение (10) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями  $\tau_1(x)$  и  $v_1(x)$ , привнесенным на ос  $y=0$  из области  $\Omega_1$ .

2. Рассмотрим краевое условие (2) в области  $\Omega_1$ , удовлетворяющее видоизмененным условиям Коши [2]:

$$u_2(x, +0) = \tau_2(x), \quad x \in \bar{I}; \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{\frac{m}{2}} \frac{\partial u_2}{\partial y} = v_2(x), \quad x \in I \quad (11)$$

давая формулой Даламбера получим

$$u_2[\theta^{(2)}(x)] = \frac{1}{2}[\tau_2(x) + \tau_2(1)] - \frac{1}{2} \int_{-1}^x v_2(t)dt, \quad (12)$$

$$u_2[\theta_{k_1}^{(2)}(x)] = \frac{1}{2}[\tau_2(a_1 + b_1x) + \tau_2(x)] - \frac{1}{2} \int_x^{a_1+b_1x} v_2(t)dt, \quad (13)$$

$$u_2[\theta_{k_2}^{(2)}(x)] = \frac{1}{2}[\tau_2(a_2 + b_2x) + \tau_2(x)] - \frac{1}{2} \int_x^{a_2+b_2x} v_2(t)dt. \quad (14)$$

Выражения (12)-(14), подставляя в краевые условия (2) получим

$$\tau_2(x) - \frac{1}{2} \int_x^1 v_2(t)dt = \mu_1 \tau_2(x) + \mu_2 \tau_2(x) - \mu_1 \int_x^{a_1+b_1x} v_2(t)dt + \mu_2 \int_x^{a_2+b_2x} v_2(t)dt + \delta_2(x). \quad (15)$$

Соотношение (15) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями  $\tau_2(x)$  и  $v_2(x)$  [3], привнесенным на ос  $y=0$  из области  $\Omega_2$ .

Из (10) и (15) согласно условиям сопряжения (3), (4), т.е. с учетом равенств:  $\tau_1(x) = c\tau_2(x)$ ,  $v_1(x) = \rho(x)v_2(x) + \lambda(x)$  исключая  $\tau_2(x)$ , получим следующее интегральное относительно неизвестной функции  $v_2(x)$ :

$$\int_x^1 (\rho(t) - c)v_2(t)dt = \mu_1 \int_x^{a_1+b_1x} (\rho(t) - c)v_2(t)dt + \mu_2 \int_x^{a_2+b_2x} (\rho(t) - c)v_2(t)dt + f(t) \quad (16)$$

где

$$f(x) = \delta_1(x) - c\delta_2(x) + \int_x^1 \lambda(t)dt + \mu_1 \int_x^{a_1+b_1x} \lambda(t)dt + \mu_2 \int_x^{a_2+b_2x} \lambda(t)dt$$

Здесь дифференцируем по  $x$ :

$$v(x) = \lambda_1(x)v(a_1 + b_1x) + \lambda_2(x)v(a_2 + b_2x) + f_1(x) \quad (17)$$

где

$$(\rho(x) - c)v_2(x) = v(x),$$

$$\lambda_1(x) = \frac{b_1\mu_1}{b_1\mu_1 + b_2\mu_2 - 1}, \quad \lambda_2(x) = \frac{b_2\mu_2}{b_1\mu_1 + b_2\mu_2 - 1}, \quad f_1(x) = \frac{1}{b_1\mu_1 + b_2\mu_2 - 1} \frac{d}{dx} f(x).$$

В (17) является функциональным уравнением [4].

Решение функциональное уравнение (17) будем искать в классе ограниченных в точке  $x=1$ . Если отказаться от этого требования, то соответствующее однородное функциональное уравнение (17)

$$v(x) = \lambda_1(x)v(a_1 + b_1x) + \lambda_2(x)v(a_2 + b_2x) \quad (18)$$

может иметь нетривиальное решение.

**Пример.** Пусть  $p_1(x) = a + bx$ ,  $p_2(x) = p_1(p_1(x)) = b^2x + ba + a$  где  $a - b = c_1$ ,  $c_1b + a = c_2$ , тогда нетрудно убедиться, что функция

$$v(x) = (1-x)^\delta, \quad \delta = \log_b \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2} - \lambda_1}{2\lambda_2}, \quad \text{где}$$

будет нетривиальным решением однородного уравнения (18), действительно; так как

$$v(p_1(x)) = (1 - p_1(x))^\delta = b^\delta (1-x)^\delta,$$

$$v(p_2(x)) = (1 - p_2(x))^\delta = b^{2\delta} (1-x)^\delta,$$

то эти значения подставляя в (18) получим следующее квадратное уравнение

$$\lambda_2 b^{2\delta} + \lambda_1 b^\delta - 1 = 0.$$

Отсюда

$$\delta = \log_b \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2} - \lambda_1}{2\lambda_2}$$

и в силу условия (1.2.1) легко убедиться что  $\delta < 0$ , следовательно решение однородного функционального уравнения (18) неорганично при  $x=1$ .

Таким образом, класс решений, где ищется решение функционального уравнения, существен.

Для решения уравнения (17) применим комбинированный метод последовательных приближений и итераций.

Для построения членов последовательности  $v_0(x), v_1(x), \dots, v_n(x), \dots$  используем рекуррентное соотношение

$$v_n(x) = \lambda_1 v_n(\alpha(x)) + \lambda_1 v_{n-1}(\beta(x)) + f_1(x) \quad (19)$$

где

$$\alpha(x) = p_1(x), \beta(x) = p_2(x).$$

В качестве нулевого приближения  $v_0(x)$  примем решение функционального уравнения

$$v_0(x) = \lambda_1 v_0(\alpha(x)) + f_1(x). \quad (20)$$

Функциональное уравнение (20) будем решать методом итераций. В (20) заменив  $x$  на  $\alpha(x)$  получим

$$v_0(\alpha(x)) = \lambda_1 v_0(\alpha(\alpha(x))) + f_1(\alpha(x)). \quad (21)$$

Теперь (21) подставляя в (20) имеем

$$v_0(x) = \lambda_1^2 v_0(\alpha_2(x)) + \lambda_1 f_1(\alpha(x)), \quad (22)$$

здесь  $\alpha_1(x) = \alpha(x)$ ,  $\alpha_2(x) = \alpha_1(\alpha_1(x))$ .

(23) является первой итерацией уравнения (21). Продолжая этот процесс, для  $n$ -ой итерации имеем

$$v_0(x) = \lambda_1^{n+1} v_0(\alpha_{n+1}(x)) + \sum_{k=0}^n \lambda_1^k f_1(\alpha_k(x)) \quad (23)$$

здесь  $\alpha_0(x) = x$ ,  $\alpha_{n+1}(x) = \alpha_n(\alpha_1(x)) = \alpha_1(\alpha_n(x))$ .

Заметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{n+1} = 0. \quad (24)$$

Так  $\alpha(x) > x$ ,  $\alpha(1) = 1$ , тогда  $\alpha_n(x) = \alpha_{n-1}(\alpha_1(x)) = \alpha_1(\alpha_{n-1}(x)) > \alpha_{n-1}(x)$ , т.е.

функциональная последовательность  $\{\alpha_n(x)\}$  монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей, т.е.  $\alpha_n(x) \leq 1, \forall x \in \bar{I}$ . Следовательно, по теореме о пределе монотонно возрастающей, ограниченной последовательности, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x) = \alpha^0(x), x \in \bar{I}. \quad (25)$$

Теперь в равенстве  $\alpha_n(x) = \alpha_1(\alpha_{n-1}(x))$  переходе к пределу при  $n \rightarrow \infty$  получим  $\alpha^0(x) = \alpha_1(\alpha^0(x))$ , отсюда заключаем что  $\alpha^0(x) \equiv 1, \forall x \in \bar{I}$ , так как  $\alpha(x)$  имеет единственную неподвижную точку  $x = 1$ . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x) = 1, \forall x \in \bar{I}. \quad (26)$$

Теперь в равенстве (23) переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  с учетом (24) и конечности значения  $v_0(x)$  - получим

$$v_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k f_1(\alpha_k(x)) \quad (27)$$

- решение функционального уравнения (21).

Нетрудно убедиться, что

$$|v_0(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k |f_1(\alpha_k(x))| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M \lambda_1^k = \frac{M}{1 - \lambda_1}, \quad (28)$$

где  $\max_{x \in I} |f_1(x)| = M$ . Следовательно, функциональный ряд правой части (28)

сходится равномерно и в силу непрерывности  $f_1(x)$  на  $\bar{I}$  заключаем, что  $v_0(x) \in C(\bar{I})$ . Нетрудно так же убедиться, что  $v_0(x) \in C^2(\bar{I})$ .

Теперь в рекуррентном соотношении (19) полагая  $n=1$ , получим функциональное уравнение для определения  $v_1(x)$ :

$$v_1(x) = \lambda_1 v_1(\alpha(x)) + \lambda_2 v_0(\beta(x)) + f_1(x), \quad (29)$$

здесь  $v_0(x)$  - известная функция определенная равенством (27).

К функциональному уравнению применяя метод итераций как и выше, получим решение уравнения (29) в виде

$$v_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k \lambda_2 v_0(\beta(\alpha_k(x))) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k f_1(\alpha_k(x)). \quad (30)$$

Нетрудно убедиться, что функциональные ряды правой части (30) сходятся равномерно и  $v_1(x) \in C^2(\bar{I})$ .

Продолжая этот процесс нетрудно найти, что

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k \lambda_2 v_{n-1}(\beta(\alpha_k(x))) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k f_1(\alpha_k(x)). \quad (31)$$

и  $v_n(x) \in C^2(\bar{I})$ .

Таким образом, мы построили функциональную последовательность  $v_0(x), v_1(x), \dots, v_n(x), \dots$ . (32)

Теперь докажем, что функциональная последовательность (32) сходится. Для этого рассмотрим функциональный ряд

$$v_0(x) + |v_1(x) - v_0(x)| + |v_2(x) - v_1(x)| + \dots + |v_n(x) - v_{n-1}(x)| + \dots \quad (33)$$

Найдём мажорантный ряд для функционального ряда (32).

Из (33) отнимая (23) с учетом (28), получим

$$|v_1(x) - v_0(x)| \leq \sum_{k=0}^n \lambda_1^k \lambda_2 v_0(\beta(\alpha_k(x))) \leq \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} \frac{M}{1-\lambda_1} = \frac{M}{\lambda_2} \left( \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} \right)^2. \quad (34)$$

Далее на основании (34) нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} |v_n(x) - v_{n-1}(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \lambda_1^k \lambda_2 |v_n(\beta(\alpha_k(x))) - v_{n-1}(\beta(\alpha_k(x)))| \leq \\ &\leq \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} \frac{M}{\lambda_2} \left( \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} \right)^2 = \frac{M}{\lambda_2} \left( \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} \right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Функциональный ряд (33) мажорируется числовым рядом

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{\lambda_2} \left( \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} \right)^{n+1}$  и следовательно он сходится равномерно на  $\bar{I}$ .

Таким образом, функциональная последовательности  $\{v_n(x)\}$  сходится равномерно т.е существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = v(x), \forall x \in \bar{I}.$$

$$\text{и } v(x) \in C^2(\bar{I}).$$

Теорема доказана.

### Библиографические ссылки

1. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Об одной нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. Узб.мат. журнал, 2010, №4, С.118-126.
2. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Задача с условием Франкля на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа.//Дифференц. уравнения, 2015.Т.51.№1.С.136-140.
3. Чориева С.Т. Задача Бицадзе-Самарского с условием Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом. Россия, Известия вузов. Математика. 2013. №5, С.51-60.
4. Choriyeva S.T. Nonlocal problem for a hyperbolic equation degenerating inside a domain with a singular coefficient. International Scientific Journal. Theoretical & Applied Science. 2021. Issue 11. Vol.103. pp.1084-1086. (Scopus ASCC:2600).
5. Mirsaburov M., Choriyeva S.T. Problem with the Frankl Condition on a Characteristic for a Class of Equations of Mixed Type.// Differential Equations, 2015, Vol., 51, No1, pp.1-6.
6. Mirsaburov M., Choriyeva S.T. A Problem With an Analog of Frankl Condition on the Characteristic for Gellerstedt Equation With Singular Coefficient.//Russian Mathematics. 2017, Vol., 61, No 11, pp.34-39.