



Antye, Mantissa and its applications

Khamid BOBOJONOV¹

Urgench State University

ARTICLE INFO

Article history:

Received July 2023
Received in revised form
15 August 2023
Accepted 25 August 2023
Available online
15 September 2023

Keywords:

Antye,
mantissa,
sequences,
functions in R set,
definition of integral,
canonical decomposition,
bounded functions.

ABSTRACT

This article provides theoretical and practical information as well as proofs about the Antye and Mantissa, and highlights the main points of it. It also suggests methods for solving several complex and Olimpiad-type problems with the help of the Antye and Mantissa.

2181-1415/© 2023 in Science LLC.

DOI: <https://doi.org/10.47689/2181-1415-vol4-iss7/S-pp270-275>

This is an open access article under the Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Ant'ye, mantissa va uning tatbiqlari

Kalit so'zlar:

Ant'ye,
mantissa,
ketma-ketlik,
 R to'plamdagi funktsiya,
aniq integral,
kanonik yoyilma,
chegaralangan funktsiya.

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada ant'ye va mantissa mavzusiga doir nazariy va amaliy ma'lumotlar hamda isbotlar algebra va sonlar nazariyasidan keltirilgan. Bir necha tipik hamda olimpiada darajasidagi masalalarni ant'ye va mantissaning xossalariidan foydalangan holda yechish metodlari tavsiya qilingan.

Антые, мантисса и ее приложения

Ключевые слова:

Антые,
мантисса,
последовательность,
функция в множестве R ,
определенный интеграл,
каноническое разложение,
ограниченная функция.

АННОТАЦИЯ

В данной статье приводятся теоретические и практические материалы и задачи на тему антые и мантиссу в основном по теории чисел и алгебре. Рекомендованы методы решения типовых конкурсных и олимпиадных задач при помощи свойств антые и мантиссы.

¹ Teacher of Mathematics, Urgench State University.

Ant'e (fran. *entiyer*) termini 1798-yilda Lejandr tomonidan taklif qilingan bo'lib, qariyb ikki yuz yildan beri ishlatib kelinmoqda. Yangi tushuncha uning miyasiga n murakkab sonining kanonik yoyilmasida p tub sonining necha marta uchrashini hisoblash zaruriyatidan kelib qolgan.

x sonining ant'yesini [x] kabi belgilashni 1808-yilda Gauss taklif qilgan.

Mantissa termini haqida adabiyotlarda diqqatga molik tarixiy ma'lumotlar deyarli uchramaydi.

Oldingi paytlarda ant'e* va mantissa* (sonning butun va kasr qism) larga doir masalalar juda tor doiradagi olimpiada masalalari hisoblanar edi. Oxirgi paytlarda esa ayrim chet davlatlar oliy o'quv yurtlariga kirish imtihonlarida shu turdagi oson masalalar taklif qilinayotgan bo'lsa, qiyinlik darajasi yuqori bo'lgan masalalar milliy va xalqaro olimpiadalarda o'quvchilarga taklif qilina boshladi.

Xo'sh ant'e va mantissaga doir masalalar nimasi bilan qiziq?

Agar ant'e va mantissani funksiya sifatida qaraydigan bo'lsak, bu funksiyalar uzluksiz emas, aniqlik, bo'lak-bo'lak uzluksizdir. Bunday funksiyalarning mavjudligi esa odatiy yechish usullaridan tubdan farq qiladi.

"Ant'e va mantissa" mavzusining o'ziga xosligi va shu mavzuga doir masalalarning murakkabligi, aniqlik, qiyinchiligi shundaki, o'quvchining bu yo'nalishda yetarli darajada mashq qilmaganligida ko'rinadi. Bu tipdagi masalalarning ko'pchiligining yechimi juda qisqa mantiqiy tahlilga asoslangan bo'ladi.

Bulardan tashqari ant'e va mantissa shunday xossalarga egaki, o'quvchidan bir qancha amallarni bajarishni talab qiladi. Shunday o'ziga xosliklarga qaramasdan ko'pgina xossalarni masalalarni yechish davomida ham hosil qilish mumkin bo'ladi.

Maqolada ant'e va mantissaga doir tanlab olingan masalalar fanning sonlar nazariyasi va algebra bo'limiga xos bo'lib, chet mamlakatlar milliy olimpiadalarda tavsiya qilingan ayrim masalalar ham berilgan. Qiziquvchilar uchun maqolada masalalarning to'liq va asoslangan yechimlari berilgan.

1. $[f(x)] = g(x)$ ko'rinishidagi tenglamalarning yechish metodlari.

Qaralayotgan tenglamalar ko'pincha konkurs masalalarida uchraydi. Bu shakldagi tenglamalarga shuningdek boshqa tenglamalar ham keltiriladi, masalan mantissa qatnashgan tenglamalar.

$$[f(x)] = g(x) \quad (1.1)$$

ko'rinishdagi tenglamalarning o'ziga xosligi tenglikning o'ng tomonining butun ekanligidir. Bundan esa tenglamani o'zgaruvchining $g(x)$ funksiyaning butun qiymatlarini qabul qiladigan qiymatlarigina qanoatlantirishi kelib chiqadi. Bundan tashqari $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning qiymatlar sohalari chegaralangan bo'lsa, (1.1) tenglama bir necha sodda tenglamalarga ajralishi mumkin.

1.1. $g(x)$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiyaning qo'llash metodi.

(1.1) tenglamani o'zgaruvchining $g(x)$ funksiyaning butun qiladigan qiymatlari qanoatlantirishidan kelib chiqib,

$$n = g(x), n \in \mathbb{Z}$$

* fran. *entiyer* - butun

* lat. *mantissa* – qo'shimcha

belgilashni kiritaylik. Faraz qilaylik $g(x)$ qat'iy monoton (o'suvchi) funksiya bo'lsin. U holda $g(x)$ funksiya teskarilantuvchi bo'lib, x ni n orqali ifodalab olamiz:

$$x = g^{-1}(n).$$

Natijada ikki marta o'zgaruvchini belgilash natijasida (1.1) tenglama butun o'zgaruvchili tenglama ko'rinishiga keltiriladi.

$$[f(g^{-1}(n))] = n, [f(g^{-1}(n)) - n] = 0 \quad (1.2)$$

Oxirgi tenglama quyidagi butun qo'sh tengsizlikka teng kuchli bo'ladi

$$0 \leq f(g^{-1}(n)) - n < 1, \quad (1.3)$$

Uni yechib, oldin n topib (1.1) ning yechimlari sonini keyin esa teskari almashtirish bilan berilgan tenglamaning ildizlarini topib olamiz.

Yuqorida ko'rib chiqilgan metodni (1.1) ko'rinishdagi tenglamalarga qo'llanilishi ko'lamini $g(x)$ funksiyaning teskarilantuvchanligi va o'zgaruvchilarni teskaridan almashtirishlarning murakkabligi boshqa usullarga nisbatan biroz cheklab qo'yadi.

Endi bu metodni (1.1) ko'rinishdagi ayrim masalalarga qo'llab ko'ramiz

11. Tenglamani yeching $\left[\frac{x+1994}{81} \right] = \frac{x+2011}{101}.$

Yechilishi. Belgilash kiritib olamiz $n = \frac{x+2011}{101}$. U holda $x = 101n - 2011$

Endi qo'sh tengsizlikni yozib olamiz

$$0 \leq \frac{101n - 17}{81} - n < 1.$$

Qo'sh tengsizlikning chap tomonini yechib $n \geq 1$ ni (nfaqat butun qiymatlarni qabul qiladi) , o'ng tomonini yechib $n \leq 4$ ni hosil qilamiz. Bundan tenglama $n = 1, 2, 3, 4$ larda to'rtta yechimga egaligi kelib chiqadi.

Javob: -1910, -1809, -1708, -1607

12. Tenglamani yeching $[x] = \frac{\sqrt{2}}{x}.$

Yechilishi. Belgilash kiritib olamiz $n = \frac{\sqrt{2}}{x}$. Keyin x ni $x = \frac{\sqrt{2}}{n}$ n

orqali ifodalab, yordamchi butun n ga nisbatan qo'sh tengsizlikni yechamiz

$$n \leq \frac{\sqrt{2}}{n} < n + 1.$$

Oldin n musbat qiymatlar qabul qiladigan holni ko'rib chiqamiz. Bu holda tengsizlik ushbu

$$n^2 \leq \sqrt{2} < n^2 + n.$$

Ko'rinishga keladi. Ravshanki, bu holda $n = 1$ butun yechim bo'la oladi.

Endi n manfiy bo'lgan holda tengsizlik ushbu

$$n^2 + n < \sqrt{2} \leq n^2$$

Ko'rinishga keladi va bu tengsizlik o'z navbatida $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ larda yechimga ega emas: $n = -1$ da tengsizlikning „ong qismi“ bajarilmasa, $n \leq -2$ larda tengsizlikning chap qismidagi tengsizlik bajarilmaydi.

Demak, $n = 1$ da berilgan tenglama yagona yechimga ega ekan.

Javob: $\sqrt{2}$

13. $x = \{32x\}$ tenglama nechta yechimga ega?

Ko'rsatma. Dastlab berilgan tenglamani $[32x] = 31x$ ko'rinishda yozib oling.

$n = 31x$ belgilashdan keyin $0 \leq n < 31$ tengsizlik yozish mumkin. Bu esa berilgan tenglama 31 ta yechimga ega ekanini bildiradi.

Javob: 31 ta yechim.

1.2. $0 \leq f(x) - g(x) < 1$ teng kuchli almashtirish metodi.

$f(x)$ funksiya mantissasining asosiy xossasi ushbu

$$0 \leq \{f(x)\} < 1, \text{ yoki } 0 \leq f(x) - [f(x)] < 1$$

munosabatlardan iborat.

Endi biz $[f(x)] = g(x)$ tenglama uchun ushbu teng kuchli almashtirishlarni yoza olamiz

$$[f(x)] = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) - g(x) < 1 \\ g(x) \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1.4)$$

(1.4) tengsizlikning yechimi bir yoki bir nechta intervallardan iborat bo'lishi mumkin va bunda (1.1) tenglamaning yechimlari (1.4) tengsizlikning yechimlari to'plamiga tegishli bo'ladi. Demak yuqoridagi mulohazalardan (1.4) tengsizlik (1.1) tenglamaning natijasi ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek (1.4) tengsizlik yechimga ega bo'lmasa, (1.1) tenglama ham yechimga ega emasligi kelib chiqadi.

Endi teng kuchli almashtirish metodi yordamida masalalar yechib ko'ramiz.

14. (Butunrossiya. / 2010–2011) Tenglamani yeching $x^2 - [x] - 2 = 0$.

Yechilishi. Berilgan tenglama $[f(x)] = g(x)$ ko'rinishdagi tenglamadan iborat. Tenglamani (1.4) ko'rinishga keltirib olamiz

$$0 \leq x - x^2 + 2 < 1.$$

Chap tomondagi tengsizlikning yechimi $[-1, 2]$ segmentdan iborat bo'ladi. („juda ham qulay bo'lmagan diskriminant“ ekanidan o'ng tomondagi tengsizlikdan kelib chiqadigan yechimlarni qaramaymiz). Bundan $g[x] \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Hosil qilingan to'rtta qiymatni berilgan tenglamaga qo'yib, quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 \quad ([x] = -1 \text{ bo'lganda}), \quad x_2 = \sqrt{3} \quad ([x] = 1 \text{ bo'lganda}), \\ x_3 &= 2 \quad ([x] = 2 \text{ bo'lganda}), \end{aligned}$$

Javob: $\{-1, \sqrt{3}, 2\}$.

15. Tenglamani yeching $[2x] = x^2$.

Yechilishi. Teng kuchli almashtirish natijasida ushbu

$$0 \leq 2x - x^2 < 1,$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikni yechimi $x \in [0, 1) \cup (1, 2]$.

Endi hosil qilingan yarim intervallardan x^2 ning qiymatini butun qiladiganlarini tanlash qiyin emas.

Javob: $\{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$.

1.3. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning chegaralanganligi metodi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar chegaralangan bo'lsa, (1.1) tenglamaning o'ng (chap) qismlari chekli sondagi butun qiymatlarni qabul qiladi. Bu holda

(1.1) tenglama ushbu tenglamalar sistemalarining majmuasiga keltiriladi

$$\begin{cases} [f(x)] = n_1, \\ g(x) = n_1, \end{cases} \begin{cases} [f(x)] = n_2, \\ g(x) = n_2, \end{cases} \dots \begin{cases} [f(x)] = n_k, \\ g(x) = n_k, \end{cases} \quad (1.5)$$

Bunda $n_1, n_2, \dots, n_k$ lar $[f(x)]$ funksiyaning qiymatlar sohasi yoki $g(x)$ funksiyaning qiymatlar sohasidagi butun sonlar yoki ushbu tenglikdan iborat

$$\{n_1, n_2, \dots, n_k\} = E([f(x)]) \cap E(g(x)) \cap Z \quad (1.6)$$

Boshqacha aytganda $f(x)$ va $g(x)$ chegaralanganligi, bir funksiyaning yuqoridan va boshqasining quyidan chegaralanganligini anglatadi. Bu holatning tahlili ham (1.5) majmuaga olib keladi.

Shuni aytish joizki, (1.5) majmua teng kuchli almashtirish bo'ladi, faqatgina

(1.6) bajarilganda. Biroq har doim ham $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ to'plamni tuzish amaliy jihatdan oson emas. Bu holda (1.5) majmua (3.1) tenglamaning natijasidan iborat bo'ladi.

16. Tenglamani yeching $[\log_2 x] = \cos x$.

Yechilishi. $\cos x$ funksiyaning chegaralanganligi va $-1, 0$ va 1 lardan iborat butun qiymatlar qabul qilishidan foydalanamiz. (1.5) majmuani yozib olamiz

$$\begin{cases} [\log_2 x] = -1, \\ \cos x = -1, \end{cases} \begin{cases} [\log_2 x] = 0, \\ \cos x = 0, \end{cases} \dots \begin{cases} [\log_2 x] = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Ikkinchi sistemani qarab chiqamiz. Bu sistema berilgan tenglamaning yagona yechimini beradi. $[\log_2 x] = 0$ tenglamaning yechimi $[1, 2)$ yarim intervaldan iborat, $\cos x = 0$ tenglamaning yechimi esa $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$, bunda $x > 0$, ya'ni logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasiga e'tibor berdik. Tekshirib, $[\log_2 \frac{\pi}{2}] = 0$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Qolgan ikkita sistema yechimga ega emas.

Javob: $\{\frac{\pi}{2}\}$

2. Mustaqil ishlash uchun misollar.

2.1. Tenglamani yeching $x^2 - 3x = [3 - 2x]$

2.2. Tenglamani yeching $x^2 = [2x]$

2.3. Tenglamani yeching $[3\sqrt{x - x^2}] = 2^{x - \frac{1}{2}}$

2.4. Tenglamani yeching $[x^6 - 1] = -\frac{9(x-1)^2}{4}$

2.5. Tenglamani yeching $[3x] = \log_{0,5} x$

2.6. Tenglamani yeching $[2 - x] = 2 \sin x$

2.7. Tenglamani yeching $[2x] = x^3 - 3$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. I.L.Semyenov “ Ant’ye i mantissa” Sbornil zadach c resheniyemi”. IPM im. M.B. Keldisha 2015g.

2. M.A.Mirzaahmedov, D.A.Sotiboldiyev “ O’quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash”. Toshkent, „O’qituvchi“ 1993-y.

3. Agaxanov N.X., Bagdanov I.I., Qajevnikov P.A. Matematika . Oblastniye olimpiadi. 8-11 klassi.- Prosvesheniye , 2010 g.

4. Adressqu T., Andrica D. Problems for Mathematical Contests. – GIL Publishing House, 2003 g.

Internet- resurslar:

5. Olymp.msu.ru – Ofitsialniy portal olimpiadi shqolnigov “Lomonosov”.

6. Rproblems.ru