



## Issues of studying quantum entanglement by students of physics specialties at universities

Bakhtiyor ABDIKAMALOV<sup>1</sup>, Raygul KHOJANAZAROVA<sup>2</sup>

Karakalpak State University named after Berdakh

---

### ARTICLE INFO

---

**Article history:**

Received June 2024

Received in revised form

15 July 2024

Accepted 15 July 2024

Available online

25 August 2024

---

### ABSTRACT

---

The paper is devoted to the methodology of studying the phenomenon of quantum entanglement in the quantum mechanics course for students majoring in physics. It is shown that it is important for university students to know about quantum entanglement, which is a key part of quantum mechanics, since It is necessary to understand various interpretations of quantum mechanics and future technologies related to this field.

The experiments conducted on the Mach-Zehnder interferometer are one of many experiments that convinced physicists that quantum mechanics cannot be described in terms of classical mechanics. In the case of the phenomenon under study, the photon does not follow one specific trajectory but must be described in terms of a quantum superposition of many trajectories.

It is proposed to study the phenomenon of quantum entanglement after mastering such topics as the postulates of quantum mechanics, the Schrödinger equation, the superposition principle, and the measurement problem, as well as after solving well-known traditional problems related to the semiclassical case. These topics create the necessary background and motivation for understanding the concept of entanglement and its implications for quantum systems. As an experimental technique, a demonstration of the operation of the simplest Mach-Zehnder interferometer manufactured by LD Didactic GmbH is proposed. For a computer demonstration of the phenomenon under study, the Mathematica computer algebra system and Wolfram products are used. As a result, it becomes possible to clearly show that quantum particles can be in a state of superposition, and thus the interferometer used is a powerful tool for revealing the fundamental nature of quantum mechanics.

2181-1415/© 2024 in Science LLC.

DOI: <https://doi.org/10.47689/2181-1415-vol5-iss4-pp35-44>

This is an open access article under the Attribution 4.0 International (CC BY 4.0) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

---

<sup>1</sup> Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Karakalpak State University named after Berdakh. E-mail: bakh.abdik@gmail.com

<sup>2</sup> Doctor of Philosophy in Pedagogical Sciences, Karakalpak State University named after Berdakh. E-mail: rai.khozha@mail.ru

# Universitet fizikasi talabalari tomonidan kvant chalkashliklarini o'rganish masalalari

## ANNOTATSIYA

**Kalit so'zlar:**

kvant mehanikasi,  
kvant chalkashlik,  
superpozitsiya printsipi,  
kvant holati,  
Mach-Zehnder  
interferometri,  
Mathematica kompyuter  
algebra tizimi,  
chigal fotonlar  
interferensiyasi,  
kompyuterda namoyish  
qilish,  
kvant teleportatsiyasi,  
kvant mehanikasi kursi  
dasturi.

Ish fizika ixtisosligi talabalari uchun kvant mehanikasi kursida kvant chigallanish hodisasini o'rganish metodikasiga bag'ishlangan. Universitet talabalari uchun kvant mehanikasining asosiy qismi bo'lgan kvant chalkashliklari haqida bilish muhimligi ko'rsatilgan, chunki bu sohaga oid kvant mehanikasi va kelajak texnologiyalarining turli talqinlarini tushunish uchun zarurdir.

Mach-Zehnder interferometri tajribalari fiziklarni kvant mehanikasini klassik mehanika nuqtai nazaridan tasvirlab bo'lmasligiga ishontirgan ko'plab tajribalardan biridir. O'rganilayotgan hodisaga kelsak, foton bitta aniq traektoriya bo'ylab ketmaydi, lekin ko'plab traektoriyalarning kvant superpozitsiyasi nuqtai nazaridan tavsiflanishi kerak.

Kvant mehanikasi postulatlari, Shredinger tenglamasi, superpozitsiya printsipi, o'lchash muammosi kabi mavzularni o'zlashtirgandan so'ng, shuningdek, yarim klassik holatga oid mashhur an'anaviy masalalarni yechgandan so'ng, kvant chalkashlik hodisasini o'rganish taklif etiladi. Ushbu mavzular chalkashlik tushunchasini va uning kvant tizimlariga ta'sirini tushunish uchun zarur asos va motivatsiyani ta'minlaydi. Eksperimental texnika sifatida biz LD Didactic GmbH tomonidan ishlab chiqarilgan eng oddiy Mach-Zehnder interferometrining ishlashini namoyish qilishni taklif qilamiz. O'rganilayotgan hodisani kompyuterda namoyish qilish uchun Mathematica kompyuter algebra tizimi va Wolfram mahsulotlari qo'llaniladi. Natijada, kvant zarralari superpozitsiya holatida bo'lishi mumkinligini aniq ko'rsatish mumkin bo'ladi va shuning uchun ishlatalidigan interferometr kvant mehanikasining asosiy mohiyatini ochish uchun kuchli vositadir.

## Вопросы изучения квантовой запутанности студентами физических специальностей университетов

## АННОТАЦИЯ

**Ключевые слова:**  
квантовая механика,  
квантовая запутанность,  
принцип суперпозиции,  
квантовое состояние,  
интерферометр  
Маха-Цендера,  
система компьютерной  
алгебры Mathematica,  
интерференция  
запутанных фотонов,  
компьютерная  
демонстрация,  
квантовая телепортация,

Работа посвящена методике изучения явления квантовой запутанности в курсе квантовой механики для студентов специальности «физика». Показано, что студентам университетов важно знать о квантовой запутанности, являющейся ключевой частью квантовой механики, поскольку она необходима для понимания различных трактовок квантовой механики и будущих технологий, связанных с этой областью.

Эксперименты, проведенные на интерферометре Маха-Цендера, являются одним из множества экспериментов, которые убедили физиков в том, что квантовая механика не может быть описана с точки зрения классической механики.

---

программа курса  
квантовая механика.

В случае изучаемого явления фотон не следует по одной определенной траектории, а должен описываться в терминах квантовой суперпозиции множества траекторий.

Предлагается изучение феномена квантовой запутанности после освоения таких тем, как постулаты квантовой механики, уравнение Шредингера, принцип суперпозиции, проблема измерения, а также после решения известных традиционных задач, касающихся квазиклассического случая. Эти темы создают необходимый фон и мотивацию для понимания концепции запутанности и её последствий для квантовых систем. В качестве экспериментальной техники предлагается демонстрация работы самого простого интерферометра Маха-Цендера, изготовленного фирмой LD Didactic GmbH. Для компьютерной демонстрации изучаемого явления используется система компьютерной алгебры Mathematica и продукты фирмы Wolfram. В результате этого становится возможным наглядно показать, что квантовые частицы могут находиться в состоянии суперпозиции, и, таким образом, используемый интерферометр является мощным инструментом для выявления фундаментальной природы квантовой механики.

## ВВЕДЕНИЕ

Квантовая запутанность – это фундаментальное свойство квантовых систем, которое в последнее время стало одним из центральных аспектов современной физики и её новых приложений. При квантовой запутанности квантовые состояния двух или более объектов оказываются настолько взаимосвязаны, что их невозможно описать независимо друг от друга, даже если эти объекты разделены на большие расстояния. Это означает, что изменение квантового состояния одного объекта автоматически приводит к изменению квантового состояния другого объекта, независимо от того, как далеко он находится.

Известно, что квантовая запутанность является одним из самых загадочных и увлекательных аспектов квантовой механики. Она уже нашла применение в создании квантовых компьютеров и может быть использована для разработки новых форм связи и криптографии. Значительное количество научных работ и учебной литературы, посвященных явлению запутанности, свидетельствует о повышенном интересе к этому феномену, что подчеркивает его важность в современных исследованиях и образовательных программах [1-6].

Несомненно, значение и последствия квантовой запутанности до сих пор не до конца поняты, и они широко обсуждаются как в научной литературе, так и в средствах массовой информации. Поэтому важно считать, что студентам университетов необходимо изучать квантовую запутанность, являющуюся ключевой частью квантовой механики. Это знание необходимо для понимания сути различных трактовок квантовой механики и будущего соответствующих технологий.

Важно также отметить, что среди специалистов по методике преподавания физики в вузах существуют разные мнения относительно необходимости

изучения квантовой запутанности студентами. Некоторые считают, что это явление слишком сложно и абстрактно для начального уровня обучения, и что студенты должны сначала овладеть основными принципами и формулами квантовой механики. Другие утверждают, что изучение квантовой запутанности может помочь студентам развить интуицию и критическое мышление в отношении квантовых явлений, а также заинтересовать их современными достижениями и перспективами в этой области [7-8].

Вопрос «Действительно ли мы понимаем квантовую механику?» остается в центре внимания многих исследователей. Как показывает опыт, изучение квантовой запутанности требует от студентов хороших математических знаний и умения работать с тензорными произведениями подпространств. Необходимо также учитывать различие между запутанными состояниями различимых и неразличимых частиц [10-11]. Тем не менее, несмотря на свою относительную сложность, квантовая запутанность имеет множество практических применений в области квантовой информации, квантовых вычислений, квантовой телепортации и других. Следует подчеркнуть увлекательность и полезность явления квантовой запутанности, которое открывает новые возможности для науки и техники. В то же время это явление ставит множество проблем и вопросов для нашего понимания природы и реальности. Об этом свидетельствуют исследования, посвященные пониманию студентами квантовой запутанности на начальном и продвинутом уровнях изучения квантовой механики, используя интерактивное моделирование. Эти исследования основываются на активности студентов, результатах тестирования и небольшом количестве собеседований со студентами [9]. Существуют также работы, где описывается экспериментальная установка, позволяющая студентам изучать квантовую запутанность и нарушать неравенства Белла [10]. Учитывая все отмеченные обстоятельства, настоящая работа была проведена с целью поиска возможностей изучения студентами университетской специальности физики явления квантовой запутанности. При этом предполагалось, что знание этого явления приведет к глубокому осмыслению физических основ явлений всего микромира.

## **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

В первую очередь следует обратить внимание на математическую подготовку студентов, в том числе на алгебраический формализм бра и кет, предназначенный для описания квантовых состояний и их знание фундаментальных элементарных свойств фотонов, открытых Лэмбом, Дираком и др. Такие свойства фотонов перечислены в [1-2]:

1. Фотоны не могут быть локализованы каким-либо значимым образом, и они вообще не ведут себя как частицы, независимо от того, описываются ли они волновой функцией или нет.

2. Волновая функция дает информацию о вероятности нахождения одного фотона в определенном месте, а не о вероятном количестве фотонов в этом месте ... Тогда каждый фотон интерферирует только сам с собой. Интерференция между двумя разными фотонами никогда не возникает».

3. По словам Р. Фейнмана, «Ньютона думал, что свет состоит из частиц, но затем было обнаружено, что он ведет себя как волна ... Мы говорим: это не похоже ни на то, ни на другое».

В качестве дополнения к этим свойствам следует подчеркнуть нелокальность фотона: «Все неразличимые фотоны освещают массив из  $N$  щелей или решетку, одновременно. Если в любой момент времени распространяется только один фотон, то этот отдельный фотон освещает весь массив из  $N$  щелей одновременно. Добавим, что согласно Фейнману «интерферируют не фотоны, а их альтернативные траектории».

Известно, что в интерферометре Маха-Цендера происходит разделение пучка света на два луча и затем они попадают на один экран. У этих двух лучей имеется разность хода и, поэтому, они интерферируют друг с другом. Как правило, полученную интерференционную картину можно использовать для измерения длины волны или её поляризации [12-13].

В то же время, в квантовой механике интерферометр Маха-Цендера может быть использован для изучения поведения фотонов [14-15]. Когда фотон проходит через интерферометр Маха-Цендера, он может существовать в суперпозиции обоих путей одновременно. Это означает, что фотон может интерферировать сам с собой, что может привести к некоторым странным и континтуитивным эффектам. Например, если фотон проходит через интерферометр Маха-Цендера с полуотражающим зеркалом в одном плече, фотон может интерферировать сам с собой и создавать интерференционную картину на другой стороне интерферометра. Однако, если заменить полуотражающее зеркало на полностью отражающее, фотон не сможет интерферировать сам с собой, и интерференционная картина не будет формироваться. В этом смысле рассматриваемый интерферометр является мощным инструментом для изучения квантовой запутанности. Его можно использовать для создания запутанных состояний, измерения степени запутанности, телепортации квантовых состояний, и он сыграл ключевую роль в развитии науки о квантовой информации. Вероятно, этот инструмент останется важным в исследовательской практике на долгие годы.

Стоит отметить, что эксперименты, проведенные на интерферометре Маха-Цендера, являются одним из многих, которые убедили физиков в том, что квантовая механика не может быть описана классической механикой [16]. Отметим, что в других экспериментах, проведенных, например, в интерферометре Майкельсона, неделимый квант присутствует одновременно в двух каналах и интерферирует сам с собой.

Следуя [17], легко можно смоделировать фотон, проходящий через интерферометр, назначив амплитуду вероятности каждому из двух возможных путей: «нижний» путь, который начинается, скажем, слева, проходит прямо через оба светофильтра и заканчивается вверху, и «верхний», путь, который начинается снизу, проходит прямо через оба светофильтра и заканчивается при этом справа (об этом подробно см. в [16]). Таким образом, квантовое состояние, описывающее фотон, представляет собой вектор  $\psi \in \mathbb{C}^2$ , который является суперпозицией «нижнего»  $\psi_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и "верхнего" пути  $\psi_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Следовательно,  $\psi = \alpha\psi_l + \beta\psi_u$  и при этом, на основе простых положений квантовой механики, должно выполняться равенство  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Оба светофильтра моделируются как унитарная матрица  $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ . Это означает, что, когда фотон встречает светофильтр, он либо остается на том же пути с амплитудой вероятности  $1/\sqrt{2}$ ,

либо отразиться на другой путь с амплитудой вероятности  $i/\sqrt{2}$ . Фазовращатель на плече моделируется как единая матрица вида  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta\Phi} \end{pmatrix}$ . Это означает, что если фотон находится на «верхнем» пути, он приобретет относительную фазу  $\Delta\Phi$ , и он останется неизменным, если он находится на нижнем пути. Таким образом, можно легко сформулировать выражения для двух состояний фотонов и для вероятности того, что он будет обнаружен на различных плечах интерферометра. Поэтому, можно использовать рассматриваемый интерферометр для оценки фазового сдвига путем оценки соответствующих вероятностей. При этом следует подчеркнуть, что при изучаемом явлении фотон не следует по тому или иному пути после первого светоделителя, а скорее должен описываться подлинной квантовой суперпозицией двух путей [12].

Такая ситуация определяет объем и содержание необходимой математической подготовки студентов. Как отмечено выше, состояние запутанной системы может быть описано волновой функцией, которая является тензорным произведением волновых функций отдельных частиц в виде  $\psi_1 \otimes \psi_2$ . Вероятность нахождения частицы в определенном состоянии может быть рассчитана с помощью правила Борна. Поэтому, для решения задач на тензорное произведение волновых функций необходимо на основе соответствующих наглядных примеров знать следующие понятия: Гильбертовы пространства, линейность, ассоциативность и дистрибутивность.

Как правило, при составлении учебной программы курса квантовой механики соблюдается традиционная последовательность расположения учебных материалов. Вначале изучаются основные понятия квантовой механики, такие как состояние, принцип суперпозиции, волновая функция, соотношения неопределенности, энергия и импульс. Затем переходят к уравнению Шредингера и уделяют особое внимание изучению момента импульса, движению микрочастиц в центрально-симметричном поле и решению известных традиционных задач, связанных с квазиклассическим случаем.

В связи с этим возникает естественный вопрос о месте явления квантовой запутанности в учебной программе курса. К сожалению, до настоящего времени не существует однозначного ответа на этот вопрос, поскольку разные учебники и преподаватели могут придерживаться различных предпочтений и подходов к преподаванию квантовой механики.

Однако один из возможных способов введения феномена квантовой запутанности – это изучение его после освоения постулатов квантовой механики, уравнения Шредингера, принципа суперпозиции и проблемы измерения. Эти темы создают необходимую базу и мотивацию для понимания концепции запутанности и её последствий для квантовых систем.

В то же время изучение квантовой запутанности сразу после введения правила Борна может быть не самым лучшим вариантом, поскольку для студентов, у которых еще не сформировалась прочная интуиция и базовые знания в квантовой механике, это может оказаться слишком рано и слишком абстрактно. Более того, запутанность включает в себя больше, чем просто квадрат модуля волновой функции, поскольку она также требует понятия составных систем, тензорных произведений, запутанных состояний и нелокальных корреляций. Поэтому с педагогической точки зрения может быть более эффективным введение

понятия запутанности на более позднем этапе курса, а именно после рассмотрения некоторых примеров и применения квантовой механики в более простых сценариях, т.е. после рассмотрения ряда квазиклассических случаев.

### **Использование экспериментальной техники и компьютерных демонстраций.**

Для достижения желаемого эффекта учебного процесса студенты должны наглядно представить устройство и принцип работы интерферометра Маха-Цендера. При этом, как показывает опыт, выполнение измерений, особенно регистрация единичных фотонов определенной полярности, совсем не обязательна. Однако, при этом студенты должны знать, что спин фотона связан с его поляризацией, а также спин и поляризация не одно и то же. Спин фотона – это чисто квантовомеханическое свойство, которое может иметь два возможных значения: +1 или -1, что соответствует правой или левой круговой поляризации. В то же время, поляризация фотона является классическим свойством, описывающим ориентацию электрического и магнитного полей электромагнитной волны. В связи с этим, предварительно предлагается продемонстрировать широкораспространенный интерферометр Маха-Цендера, изготовленный для учебных целей производителя LD Didactic GmbH. Как правило, студенты при изучении курса оптика выполняют такие работы, как измерение показателя преломления воздуха с помощью такого интерферометра. В результате этого они наглядно представляют физическую суть изучаемого явления.

Авторами [20] была проведена серия экспериментов с использованием источника спонтанного параметрического преобразования с понижением частоты для создания пар фотонов, находящихся либо в запутанных, либо в незапутанных состояниях поляризации. В ходе экспериментов было определено полное квантово-механическое состояние поляризации одного фотона в зависимости от результатов измерений, выполненных для другого фотона. Обнаружено, что в случае незапутанных состояний измеренное состояние одного фотона не зависит от измерений, выполненных для другого. Тем не менее, для запутанных состояний измеренное состояние действительно зависит от результатов измерений, выполненных на другом фотоне, что возможно благодаря нелокальности запутанных состояний.

Показано, что подобные эксперименты могут быть полезны для учебных лабораторий на уровне бакалавриата. Однако из-за отсутствия соответствующей экспериментальной базы постановка таких экспериментов практически невозможна для многих учебных заведений. Поэтому предварительное изучение устройства и принципа работы интерферометра Маха-Цендера является необходимым условием для более глубокого изучения таких курсов, как квантовая механика.

Считаем целесообразным отметить, что существует большое количество учебной и научной литературы (см. например [21]), которая представляет собой исчерпывающее введение в квантовую механику с использованием системы Mathematica в качестве инструмента для расчетов и моделирования. В книге рассматриваются такие темы, как уравнение Шредингера, гармонический осциллятор, атом водорода, спин, запутанность и квантовая информация. Книга также содержит множество примеров и упражнений, иллюстрирующих использование системы Mathematica для квантовой механики. В книге говорится: «Интерферометр Маха-Цендера является прибором, который можно использовать

для изучения поведения фотонов. Он состоит из двух разветвителей луча и двух зеркал, которые разделяют и интерферируют луч света на два пути».

Отметим, что в программной части сайта <https://demonstrations.wolfram.com> собрано большое количество разработок, касающиеся вопросам компьютерной демонстрации явления квантовой запутанности. Например, можно показать демонстрационную программу «Квантовая запутанность против классической корреляции», разработанной Jaroslav Kysela. В ней показаны две идентичные установки, в которых пары фотонов, коррелированные по своей поляризации, создаются источниками, расположенными в центре. Фотоны в каждой паре последовательно обнаруживаются двумя детекторами, состоящих из поляризационного светоделителя с двумя экранами. Оба детектора можно поворачивать для измерения входящих фотонов в любом базисе линейной поляризации. В этой демонстрационной разработке пара фотонов непрерывно генерируются двумя источниками и собирается статистика измерений. При достаточно большом количестве обнаруженных пар. При этом статистика измерений соответствует вероятностям обнаружения отдельных мод поляризации.

Естественно, при этом возникает четкое разделение между квантовой запутанностью и классической корреляцией, которые представляют собой два разных типа корреляций, существующих между физическими системами. Студенты должны понимать, что классическую корреляцию можно описать с помощью классической теории вероятности, и она не включает в себя никаких квантовых эффектов. Поэтому, если два фотона коррелируют только классически по своей поляризации, то измерение поляризации одного фотона не влияет на поляризацию другого фотона, а корреляция между ними будет зависеть от угла между детекторами.

Таким образом, включение явления квантовой запутанности в программу курса квантовой механики оказывает значительное положительное влияние на более глубокое освоение студентами физических основ явлений микромира. Это, в свою очередь, приводит к повышению интереса студентов к данному учебному предмету и его связи с классической физикой. Как было отмечено выше, такие квантовые явления следует изучать после освоения фундаментальных физических основ предмета. Наряду с этим, как показывает опыт, квантовая запутанность относится к числу сложных тем для преподавания, даже студентам старших курсов физического факультета. Это связано с тем, что её понимание требует глубокого освоения основополагающих принципов квантовой механики.

### **ВЫВОДЫ:**

1. Интерферометр Маха-Цендера можно использовать для демонстрации того, что квантовые частицы могут находиться в состоянии суперпозиции, т.е. каждая из них может находиться в двух или нескольких местах одновременно и квантовые частицы могут быть запутаны.

2. Определен минимальный объем математической подготовки, необходимый для изучения явления квантовой запутанности. Как показал опыт, при этом следует обратить особое внимание на свойства волновых функций и умение студентов решать задачи на тензорное произведение волновых функций.

3. Следует обращать особое внимание на использование мысленных экспериментов, создание гипотетических ситуаций, что, в свою очередь, привело к заметному развитию творческого мышления студентов.

4. Использование компьютерных демонстраций для того, чтобы дать студентам практический опыт работы с явлением квантовой запутанности.

5. Изучение квантовой запутанности привело к более глубокому осмыслению студентами физических основ явлений всего микромира и коренному изменению их отношений к различным интерпретациям квантовой механики.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ:**

1. Duarte, F. J. (2020). Fundamentals of quantum entanglement (2nd ed.). IOP Publishing.
2. Duarte, F. J., & Taylor, T. S. (2021). Quantum entanglement engineering and applications. IOP Publishing, Bristol, UK. 218 p.
3. Scarani, V. (2006). Quantum physics. A first encounter. Interference, entanglement, Ansreality. Oxford University Press.
4. Bengtsson, I., & Życzkowski, K. (2017). Geometry of quantum states. An introduction to quantum entanglement. Second Edition. Cambridge University Press.
5. Clifton, R. (2004). Quantum entanglements. Selected papers. Oxford University Press.
6. Федоров, А. К., Киктенко, Е. О., Хабарова, К. Ю., & Колачевский, Н. Н. (2023). Квантовая запутанность, телепортация и случайность: Нобелевская премия по физике 2022 года. УФН, 193(9), 1162–1172.
7. Kashani, S., & Zaret, D. (2023, February 15). Using the Julia framework to teach quantum entanglement. arXiv preprint arXiv:2302.12889.
8. The World's Top Ten Quantum Tech Universities and Research Institutions. (2021, January 19). Retrieved from <https://thequantuminsider.com/2021/01/19/the-worlds-top-ten-quantum-tech-universities-and-research-institutions/>.
9. Kohnle, A., & Deffebach, E. (2015, December 8). Investigating student understanding of quantum entanglement. arXiv preprint arXiv:1512.02629.
10. Jacobowicz, L., & Coe, H. (2022, January 1). Quantum entanglement in the lab. Photoniques (Photoniques), 113, 26-31.
11. Laloe, F. (2004, November 14). Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes and theorems. arXiv preprint arXiv:quant-ph/0209123v2.
12. Benatti, F., Floreanini, R., Franchini, F., & Marzolino, U. (2020). Quantum entanglement in many-body systems. Physics Reports, 878, 1-27.
13. Johann, T. J. F., & Marzolino, U. (2021). Locality and entanglement of indistinguishable particles. Scientific Reports, 11, Article number: 15478.
14. Pereira, A., Ostermann, F., & Cavalcanti, C. (2009). On the use of a virtual Mach-Zehnder interferometer in the teaching of quantum mechanics. Physics Education, 44(3), 281-291.
15. Zetie, K. P., Adams, S. F., & Tocknell, R. M. (2000). How does a Mach-Zehnder interferometer work? Physics Education, 35(1), 46-48.
16. Rioux, F. Using a Mach-Zehnder Interferometer to Illustrate Feynman's Sum Over Histories Approach to Quantum Mechanics. Retrieved from <https://chem.libretexts.org>.

17. Banchielli, A., & Gregoratti, M. (2021). Quantum optomechanical system in a Mach-Zehnder interferometer. *Physical Review A*, 104. (arXiv:2101.09011v2 [quant-ph] 24 Jun 2021).
18. Vedral, V. (2006). *Introduction to Quantum Information Science* (pp183). Oxford University Press.
19. Dederík, E., & Beck, M. (2014). Exploring entanglement with the help of quantum state measurement. *American Journal of Physics*, 82(5), 962–971.
20. Hobson, A. (2017). Quantum measurements. *American Journal of Physics*, 85(5), 260–271.
21. Schmied, R. (2020). *Using Mathematica for Quantum Mechanics: A Student's Manual*. (pp. 193). Springer.